Faculté des Sciences et Techniques de Tanger
Département Des Sciences Mathématiques
Feuille de TD N°5 MIPC-I Année Universitaire 07-08

Exercice 1. Prouver que pour multiplier une matrice à droite par une matrice colonne revient à effectuer une combinaison linéaire de ses colonnes, c'est à dire, prouver que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} .x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} .x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} .x_m$$

de même, prouver que multiplier une matrice à gauche par une matrice colonne revient à effectuer une combinaison linéaire de ses lignes, c'est à dire, prouver que

$$(x_1 \dots\dots x_n). \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = x_1(a_{11} \dots\dots a_{1m}) + \dots\dots x_n(a_{n1} \dots\dots a_{nm})$$

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $M_{n,n}(K)$ des matrices carrées d'ordre $n > 1$. Démontrer que

i) L'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

ii) L'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$.

iii) L'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de dimension n.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires inférieures $n \times n$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Quel est sa base et sa dimension.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ trouver la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à la base : $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2$. Calculer P^{-1}.

Exercice 5. On considére la rotation de centre O et d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$. Sa matrice est de la forme :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a. Calculer $R_\theta R_\gamma$, et en déduire R_θ^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b. Calculer l'inverse de R_θ.

Exercice 6. Trouver le rang des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. E est un K-espace vercotoriel, $\dim_K E = n$. Une matrice A $M_n(K)$ est dite

ETUDUP.com

nilpotente s'il existe un entier $p > 1$ tel que : $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$ **a.** Démontrer que si A est nilpotente d'indice p alors $I_n - A$ est inversible et a pour inverse : $I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1}$.
b. Démontrer que s'il existe $e \in E$ telque $A^{p-1}(e) \neq 0_E$ alors $(e, A(e), A^2(e), ...A^{p-1}(e))$ est libre.
c. Que se passe-t-il si p=n ?

Applications : a. Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer les puissances successives de $B = A - I$, en déduire A^n.
b. Calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a, b, $c \in \mathbb{R}$.

c. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que $B^3 = 0$. En déduire A^n pour n entier naturel. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(e, B(e), B^2(e))$.

Exercice 8. Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on note $M(a, b, c)$ la matrice carrée d'ordre 3 donnée par $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+c & b & -c \\ b & a+2c & -b \\ -c & -b & a+c \end{pmatrix}$
a. Montrer que toute matrice $M(a, b, c)$peut s'écrire sous la forme $AI_3 + bJ + cK$ où J et K sont independantes de a, b et c. En déduire que $E = \{M(a, b, c); (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ muni des opérations usuelles (addition des matrices et multiplications par un scalaire) est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ dont on précisera une base.
b. Calculer J^2, JK, KJ et K^2 en fonction de I_3, J et K. La multiplication des matrices est-elle stable dans E

Exercice 9. On considére la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1.) L'ensemble des matrices de la forme A est il un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$? Si oui quel est sa dimension ?
2.) Vérifier que $A = (a - b)I_3 + bJ$. En calculant J^n en déduire A^n.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A^n est de la forme $\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. En déduire A^n

Exercice 11. Soit M une matrice carrée. Démontrer que M est inversible si et seulement si M^t est inversible. Démontrer également que si M est inversible alors $(M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$.

Exercice 12. SI M et N sont des matrices carrées réelles de même ordre, démontrer que M et N sont inversibles si et seulement si $M.N$ est inversible. Calculer l'inverse de M et l'inverse de N en fonction de M, N et $(M.N)^{-1}$.

ETUDUP .com

Exercice 1 $n = 3$; $m = 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3 & a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(a_{11}, a_{12}) + x_2(a_{21}, a_{32}) + x_3(a_{31}, a_{32})$$

Exercice 2 i/ $S_n(K) = \{ A \in \mathcal{M}_n(K) ;\ {}^tA = A \}$ $n = 3$

- $A \in S_3(K) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et ${}^tA = A \Rightarrow \begin{matrix} a_{21} = a_{12} \\ a_{31} = a_{13} \\ a_{32} = a_{23} \end{matrix}$

d'où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$$+ a_{13}\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}$$

les 6 matrices dans cette décomposition forment une famille génératrice de $S_3(K)$ cette famille est libre ($\sum_{i=1}^{6} \alpha_i A_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$) d'où la famille est une base et $\dim S_3(K) = 6 = \frac{3\times 4}{2}$

- Soient A, B 2 matrices de $S_n(K)$ alors

${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B \Rightarrow A+B \in S_n(K)$

${}^t(\alpha A) = \alpha \cdot {}^tA = \alpha \cdot A \Rightarrow \alpha A \in S_n(K)$

ii/ $\mathcal{A}_n(K) = \{ A \in \mathcal{M}_n(K) ;\ {}^tA = -A \}$

* $A, B \in \mathcal{A}_n(K)$: ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = -A - B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in \mathcal{A}_n(K)$

${}^t(\alpha A) = \alpha \cdot {}^tA = \alpha(-A) = -(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in \mathcal{A}_n(K)$

* $A \in \mathcal{A}_3(K) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}_3(K)$ et ${}^tA = -A$

$\Rightarrow a_{11} = -a_{11}$; $a_{22} = -a_{22}$; $a_{33} = -a_{33}$; $a_{21} = -a_{12}$; $a_{31} = -a_{13}$; $a_{23} = -a_{32}$

d'où $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$

$$A = a_{12}\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ -1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ -1&0&0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&-1&0 \end{pmatrix} = a_{12}\cdot J + a_{13}\cdot K + a_{23}\cdot L$$

le système $\{J, K, L\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(K)$

le système est libre ($aJ+bK+cL = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$)

le système est une base donc $\dim \mathcal{A}_3(K) = 3 = \frac{3\times 2}{2}$

ETUDUP .com

iii/ $D_n(K) = \{ D \in \mathcal{M}_n(K) ;\ D \text{ diagonale} \}$

• D et D' 2 matrices de $D_n(K)$ alors $D = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $D' = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$

avec $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$

d'où $D + D' = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et $c_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ donc $D + D' \in D_n(K)$

• $\alpha D = (\alpha a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $\alpha a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ d'où $\alpha D \in D_n(K)$

• Soit $D \in D_n(K)$: alors $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nn}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

les n matrices forment une famille génératrice de $D_n(K)$

la famille est libre ($\sum \alpha_i \Pi_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$) donc base et $\dim D_n(K) = n$

Exercice 3 $T_n(K) = \{ T = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \ ; \ \forall\, 1 \le i < j \le n : a_{ij} = 0 \}$

• Soient T et T' de $T_n(K)$ alors $T = (a_{ij})$ et $T' = (b_{ij})$ avec

$\forall i < j : a_{ij} = 0$ et $b_{ij} = 0$ d'où $a_{ij} + b_{ij} = 0 \Rightarrow T + T' \in T_n(K)$

• $\alpha T = (\alpha a_{ij})$ et $\forall i < j : \alpha(a_{ij}) = 0 \Rightarrow \alpha T \in T_n(K)$

• $T = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nn}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

les matrices dans cette décomposition forment une famille génératrice de $T_n(K)$

la famille est libre ($\sum \alpha_i \Pi_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$) donc base de $T_n(K)$

• $\dim K_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 4

$$\begin{cases} e_1' = e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{1}{2}e_1' + \frac{1}{2}e_2' + \frac{1}{2}e_3' \\ e_2 = \frac{1}{2}e_1' - \frac{1}{2}e_2' + \frac{1}{2}e_3 \\ e_3 = \frac{1}{2}e_1' + \frac{1}{2}e_2' - \frac{1}{2}e_3' \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = {}^t(P^{-1}) \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix}$$

Exercice 5 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

a/ $R_\theta R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma & -\sin\theta\sin\gamma - \sin\theta\cos\gamma \\ \sin\theta\cos\gamma + \cos\theta\sin\gamma & -\sin\theta\sin\gamma + \cos\theta\cos\gamma \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\gamma) & -\sin(\theta+\gamma) \\ \sin(\theta+\gamma) & \cos(\theta+\gamma) \end{pmatrix}$

ETUDUP .com

Exercice 5 : (Suite)

- $R_\theta^2 = R_\theta \cdot R_\theta = R_{2\theta}$; $R_\theta^3 = R_\theta^2 \cdot R_\theta = R_{2\theta} \cdot R_\theta = R_{3\theta}$

On demontre par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $R_\theta^n = R_{n\theta}$

b/ $R_\theta \cdot R_\gamma = R_\gamma \cdot R_\theta = I \iff R_{\theta+\gamma} = R_0 \Rightarrow \theta+\gamma \equiv 0 \Rightarrow \gamma \equiv -\theta \ [2\pi]$

d'où $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

Exercice 6 Rang de matrice (utilisons la methode de Gauss)

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} F_1 \\ F_1-F_2 \\ F_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_2+F_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = 3$

- $B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$

  + Si $a=0$; $b=0$ alors $B=0 \Rightarrow rg\, B = 0$
  + Si $a=0$; $b\neq 0$ alors $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, B = 3$
  + Si $a\neq 0$; $b=0$ alors $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, B = 3$
  + Si $a\neq 0$; $b\neq 0$ $B \sim \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a^2 & -b^2 \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a^2 & -b \\ 0 & 0 & -a^3-b^3 \end{pmatrix}$

    • Si $a=-b$ alors $B \sim \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, B = 2$

    • Si $a \neq -b$ alors $rg\, B = 3$

Exercice 7 a/ $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}) = I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1} - A - A^2 - \dots - A^{p-1} - A^p$

$= I_n - A^p = I_n \quad (A^p = 0)$

donc $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}$

b/ Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ / $\alpha_0 e + \alpha_1 A(e) + \alpha_2 A^2(e) + \dots + \alpha_{p-1} A^{p-1}(e) = 0$

- On applique à cette egalité : A^{p-1} et on obtient :

$\alpha_0 A^{p-1}(e) + \alpha_1 A^p(e) + \alpha_2 A^{p+1}(e) + \dots + \alpha_{p-1} A^{2p-2}(e) = 0 \Rightarrow \alpha_0 A^{p-1}(e) = 0$

or $A^{p-1}(e) \neq 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

- On remplace α_0 par 0 puis on applique au reste A^{p-2} on obtient

$\alpha_1 A^{p-1}(e) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ et ainsi de suite on obtient

$\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, ..., $\alpha_n = 0$ $\Rightarrow$ la famille est libre

c/ Si $p = n$ alors $B = (e, A(e), A^2(e), \dots, A^{n-1}(e))$ est libre et donc base car $\dim E = n = Card\, B$

ETUDUP .com

Application: a/ $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ $B^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$ $B^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$; $\forall n\geq 4 : B^n=0$

$$A^n=(B+I)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k = C_n^0 B^0 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B^3 + 0$$

$$= I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ n+\frac{(n-1)n}{2} & n & 1 & 0 \\ n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} & n+\frac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$$

c/ $B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\forall n\geq 3$

$$A^n=(I+B)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k = C_n^0 B^0 + C_n^1 B^1 + C_n^2 B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

a/. $\Pi(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b&0\\b&0&-b\\0&-b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c&0&-c\\0&2c&0\\-c&0&c\end{pmatrix}=a.I_3+bJ+cK$

- Soient $\Pi(a,b,c)$ et $\Pi(a',b',c')$ 2 matrices de E alors

$\Pi(a,b,c)+\Pi(a',b',c')=aI_3+bJ+cK+a'I_3+b'J+c'K=\Pi(a+a',b+b',c+c')\in E$.

$\alpha\,\Pi(a,b,c)=\alpha(aI_3+bJ+cK)=\alpha aI_3+\alpha bJ+\alpha cK=\Pi(\alpha a,\alpha b,\alpha c)\in E$

- La famille $B=\{I_3,J,K\}$ est une famille generatrice de E, par definition.

De plus B est libre ($aI_3+bJ+cK=0 \Rightarrow a=b=c=0$)

donc B est une base de E

b/. $J^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=K$; $JK=KJ=2J$; $K^2=2K$

- $\Pi(a,b,c)\cdot\Pi(a',b',c')=(aI+bJ+cK)(a'I+b'J+c'K)$

$=aa'I+ab'J+ac'K+ba'J+bb'K+bc'(2J)+ca'K+cb'(2J)+cc'(2K)$

$=aa'I+(ab'+ba'+2cb'+2bc')J+(bb'+ac'+2cc')K \Rightarrow \Pi(a,b,c)\times\Pi(a',b',c')\in E$

donc la multiplication est stable dans E

Exercice 9 1/. $A+A'=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a'&b'&b'\\b'&a'&b'\\b'&b'&a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a'&b+b'&b+b'\\b+b'&a+a'&b+b'\\b+b'&b+b'&a+a'\end{pmatrix}\in E$

- $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b&b\\b&0&b\\b&b&0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

La famille $B=\{I,K\}$ est generatrice de E

De plus la famille est libre $aI+bK=0 \Rightarrow a=b=0$

donc B est une base de E et $\dim E=2$

2/ • $(a-b)I_3+bJ=\begin{pmatrix}a-b&0&0\\0&a-b&0\\0&0&a-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&b&b\\b&b&b\\b&b&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}=A$

- $J^2=3J$; $J^3=J^2.J=3J^2=3^2J \Rightarrow \forall n\geq 1 : J^n=3^{n-1}.J$

- $A^n=((a-b)I_3+bJ)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (bJ)^k((a-b)I)^{n-k}=\sum C_n^k b^k.3^{k-1}.J\,(a-b)^{n-k}=$

$=\frac{1}{3}\left(\sum C_n^k (3b)^k.(a-b)^{n-k}.J\right)=\frac{1}{3}(a+2b)^n.J$;

ETUDUP .com

et encore plus..